

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON PROBLEMEN DER MATERIELL NICHTLINEAREN STRUKTURMECHANIK MIT HILFE DER DEFORMATIONSTHEORIE

Martin Bernreuther
Universität Stuttgart

Kurzfassung: Die Modellierung des mechanischen Materialverhaltens von Werkstoffen wie z. B. Stahl bei Überschreiten der Fließspannung erfordert die Berücksichtigung der Plastifizierung und der damit verbundenen irreversiblen Verformungen. Die nichtlineare Beziehung zwischen Dehnungen und Spannungen bedingt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Lasten und Verschiebungen. Zur Lösung ist ein iteratives Vorgehen erforderlich. Verwendet wird die Deformationstheorie.

1 Rheologisches Modell

Einaxiale Zugversuche lassen bei duktilen Werkstoffen wie z. B. Baustahl einen ausgeprägten Fließbereich erkennen. Vereinfachend wird das nichtlineare Verhalten durch eine bilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung modelliert. (s. Abbildung 2)

Dieses Werkstoffverhalten kann durch ein einfaches Modell beschrieben werden. Hierzu wird eine Parallelschaltung eines HOOKEschen Elements mit einem SAINT VENANTschen Element mit einem HOOKEschen Element in Reihe geschaltet (s. Abbildung 1). Beim HOOKEschen elastischen Element, das als Feder dargestellt wird, besteht eine lineare Beziehung zwischen der Spannung und der Verzerrung. Für ein idealplastisches Materialverhalten steht das SAINT VENANTsche plastische Element, das als Reibklotz dargestellt wird. Die Kraft wird hier über COULOMBSche Reibung, bei der Haft- und Gleitreibungsindex identisch sind, übertragen. Die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung kann mit Hilfe einer Heaviside-Funktion beschrieben werden, deren Sprung-

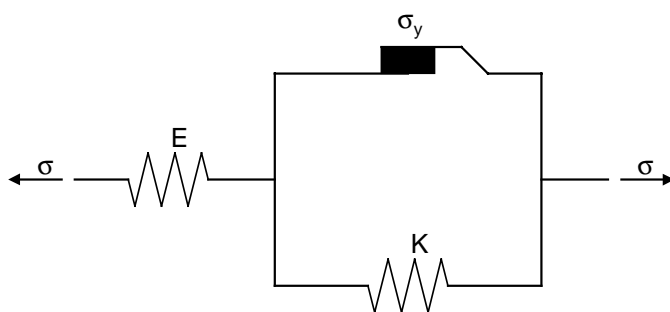


Abbildung 1: Rheologisches Modell

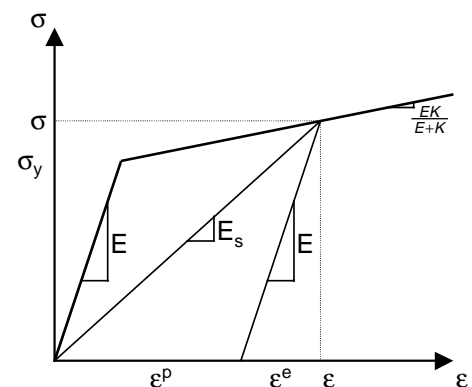


Abbildung 2: ϵ - σ Beziehung

stelle bei der Fließspannung σ_y liegt. Wird für die zweite Feder ein Elastizitätsmodul $K=0$ gewählt, so erhält man ein idealplastisches Verhalten, für $K>0$ eine isotrope Verfestigung. Beim Grenzwert $K \rightarrow \infty$ bleibt das System auch für $\sigma > \sigma_y$ linear elastisch, da

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{EK}{E+K} = E.$$

Das Verhalten dieses Systems ist geschwindigkeitsunabhängig. Viskoses Materialverhalten bleibt bei der ratenunabhängigen Plastizität unberücksichtigt. Die hier betrachteten eindimensionalen Zusammenhänge können auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden.

2 Fließfläche

Versuche zeigen, daß bei den betrachteten Materialien ein hydrostatischer Spannungszustand keine Plastifizierung hervorruft. Außerdem bleibt das Volumen bei einer Plastifizierung konstant. Betrachtet man das Kristallgitter, kann man sich den Prozeß als Verschiebung an einer Gleitfläche vorstellen. Der hydrostatische Anteil der Spannung ist unbeteiligt.

Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum können die Spannungen als dreidimensionale Vektoren gedeutet werden. Der hydrostatische Zustand wird durch Punkte der Raumdiagonalen beschrieben. Ein beliebiger Spannungsvektor läßt sich in einen hydrostatischen Anteil und einen dazu orthogonalen deviatorischen Anteil, einem Vektor auf der Deviatorebene mit dem Normalenvektor $(1,1,1)^T$, aufspalten. Dies läßt sich unter Verwendung der Invarianten auch auf den allgemeinen zweistufigen symmetrischen Spannungstensor übertragen.

Betrachtet man die Hauptspannungen σ mit

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \text{tr}(\sigma) \\ &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \end{aligned} \quad (2.1)$$

als erster Invarianten, so erhält man für den hydrostatischen Anteil, den Kugeltensor

$$\sigma^S = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

und für den Deviator σ^D

$$\begin{aligned} \sigma^D &= \text{dev}(\sigma) \\ &= \sigma - \sigma^S \end{aligned} \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen von (2.2) erhält man

$$\sigma^D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) & & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & & \frac{2}{3}\sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Die zweite Invariante des Deviators $J_2(\sigma) \equiv I_2(\sigma^D)$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} I_2(\sigma^D) &= \frac{1}{2} \left(I_1((\sigma^D)^2) - (I_1(\sigma^D))^2 \right) \\ &= I_2(\sigma) + \frac{1}{3} (I_1(\sigma))^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

zu

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}((\sigma^D)^2) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \\ &= \frac{1}{6} ((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Frobeniusnorm $\|\sigma\| = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ des Spannungsdeviators hängt direkt von seiner zweiten Invarianten ab:

$$\|\sigma^D\| = \sqrt{2J_2(\sigma)} \quad (2.7)$$

Im Hauptspannungsraum liegen alle Punkte, deren Deviator die gleiche Norm besitzen, auf der Oberfläche des Zylinders mit der Raumdiagonalen als Achse. Bei der HUBER-VON MISES-HENCKY-Fließbedingung erhält man für Spannungspunkte innerhalb eines solchen Zylinders elastisches und auf der Oberfläche plastisches Materialverhalten. Der Radius dieses Zylinders wird aus einem einaxialen Zugversuch gewonnen. Die ermittelte Fließspannung sei

$$\sigma_{EZ} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

und somit

$$\sigma_{EZ}^D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sigma_y \quad (2.9)$$

$$\|\sigma_{EZ}^D\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \quad (2.10)$$

Gleichungen (2.10) und (2.7) motivieren folgende Definition einer skalaren Vergleichsspannung σ_v , die direkt mit der Fließspannung σ_y verglichen werden kann:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma^D\| \\ &= \sqrt{3J_2(\sigma)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Als VON MISES-Fließbedingung ergibt sich

$$f = \sqrt{3J_2(\sigma)} - \sigma_0(\alpha) \leq 0 \quad (2.12)$$

mit $\sigma_0(\alpha) = \sigma_y + K\alpha$. Da die Erfüllung der Fließbedingung allein von der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators J_2 abhängt, spricht man von J_2 -Plastizität.

Zweistufige symmetrische Tensoren werden im folgenden als Vektor und vierstufige symmetrische Tensoren als Matrix dargestellt.

3 Kinematische und konstitutive Gleichungen

Für kleine Verschiebungen u kann der Verschiebungsgradient additiv in den symmetrischen infinitesimalen Verzerrungstensor ε und den antisymmetrischen Drehtensor zerlegt werden.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

Die Verzerrung setzt sich wiederum additiv aus einem elastischen und plastischen Anteil zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.2)$$

Im elastischen Fall kann mit Hilfe des Elastizitätstensors C die Spannungen σ mit $\sigma = C\varepsilon$ berechnet werden. Für isotrope Materialien gilt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

mit $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. E bezeichnet den Elastizitätsmodul und ν die Querdehnzahl. Eine Vergleichsverzerrung ε_V lässt sich über das Potential Π herleiten:

$$\begin{aligned} \Pi &= \sigma \varepsilon \\ &= \sigma_V \varepsilon_V \end{aligned} \quad (3.4)$$

bzw.

$$\begin{aligned} E\varepsilon_V^2 &= \varepsilon C \varepsilon \\ &= \frac{2E}{1+\nu} I_2(\varepsilon) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} (I_1(\varepsilon))^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für die elastische Vergleichsverzerrung ε_V^e erhält man

$$\varepsilon_V^e = \sqrt{\frac{2}{1+\nu} J_2(\varepsilon^e) + \frac{1}{3(1-2\nu)} (I_1(\varepsilon^e))^2} \quad (3.6)$$

Die plastische Vergleichsverzerrung ε_V^p wird unter der Annahme plastischer Inkompressibilität, d. h. als Grenzwert für $\nu \rightarrow 1/2$ zu

$$\varepsilon_V^p = \sqrt{\frac{4}{3} J_2(\varepsilon^p)} \quad (3.7)$$

Analog lässt sich auch (2.11) durch $\frac{\sigma_V^2}{E} = \sigma C^{-1} \sigma$ und $\nu \rightarrow 1/2$ herleiten.

Bei einer Entlastung wird der Belastungspfad verlassen. Der Entlastungspfad ist parallel zum elastischen Pfad. Bei der Deformations-, bzw. HENCKY-Theorie wird dies nicht berücksichtigt. Die Spannungs-/Dehnungs-Beziehung ist hier eindeutig. Falls keine Entlastung vorkommt, kann das Rechenmodell äquivalente Ergebnisse zur Fließtheorie liefern. Wie aus Abbildung 2 zu ersehen ist gilt:

$$\begin{aligned} \sigma &= E_s \varepsilon \\ &= E \varepsilon^e \end{aligned} \quad (3.8)$$

Der Sekantenmodulus ergibt sich zu

$$E_s = \begin{cases} \frac{\sigma_y}{\varepsilon} + E - \frac{\sigma_y}{\varepsilon} \frac{K}{E+K} & \text{falls } E\varepsilon > \sigma_y \\ E & \text{falls } E\varepsilon \leq \sigma_y \end{cases} \quad (3.9)$$

Aus (3.2) und (3.8) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &= \frac{\sigma}{E_s} - \varepsilon^e \\ &= \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \sigma \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bei der *assoziierten* Fließregel wird vorausgesetzt, daß die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}^p$ normal zur Fließfläche verläuft. Im Falle der VON MISES Fließbedingung ist der Spannungsdeviator σ^D normal zur Fließfläche:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &= c \sigma^D \end{aligned} \quad (3.11)$$

Es wird angenommen, daß diese Normale während eines Zeitschritts konstant bleibt. ε^p ist somit proportional zum Spannungsdeviator und aus (3.10) und (2.9) folgt

$$\varepsilon^p = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \sigma^D \quad (3.12)$$

3.1 Ebener Verzerrungszustand

Bei einer Scheibe mit ebenem Verzerrungszustand gilt $\varepsilon_{33} = 0$, sowie $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Aufgrund von (3.2) ist

$$\varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p = 0 \quad (3.13)$$

Mit

$$\varepsilon_{33}^e = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) \quad (3.14)$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^p &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \sigma_{33}^D \\ &= \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_{33} - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

erhält man

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_s}{E} (2\nu - 1) \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.16)$$

Durch Einsetzen von (3.16) in $\varepsilon = C^{-1}\sigma$ bzw.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{23}^e \\ \gamma_{13}^e \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

erhält man

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{\nu E_s}{2E} (1 - 2\nu) & -\frac{3}{2}\nu + \frac{\nu E_s}{2E} (1 - 2\nu) & 0 \\ & 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{\nu E_s}{2E} (1 - 2\nu) & 0 \\ \text{sym.} & & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Auch beim plastischen Anteil wird (3.16) in

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^p \\ \varepsilon_{22}^p \\ \varepsilon_{33}^p \\ \gamma_{12}^p \\ \gamma_{23}^p \\ \gamma_{13}^p \end{pmatrix} = \frac{E - E_s}{EE_s} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

eingesetzt und man erhält

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^p \\ \varepsilon_{22}^p \\ \gamma_{12}^p \end{pmatrix} = \frac{E - E_s}{EE_s} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{E_s}{4E}(1-2\nu) & -\frac{3}{4} + \frac{E_s}{4E}(1-2\nu) & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{E_s}{4E}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & 3 & \sigma_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Addition nach (3.2) und Invertierung der Matrix führt zu

$$\sigma = C_s \varepsilon \quad (3.21)$$

mit

$$C_s = \frac{1}{\left(3 + \frac{E_s}{E}(2\nu - 1)\right)(2\nu - 1)} \begin{pmatrix} ((2\nu - 1)E_s - E) & (1 - 2\nu)E_s - E & 0 \\ (2\nu - 1)E_s - E & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & (2\nu - 1)E_s \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Für $E_s \rightarrow E$ erhält man den elastische Materialtensor.

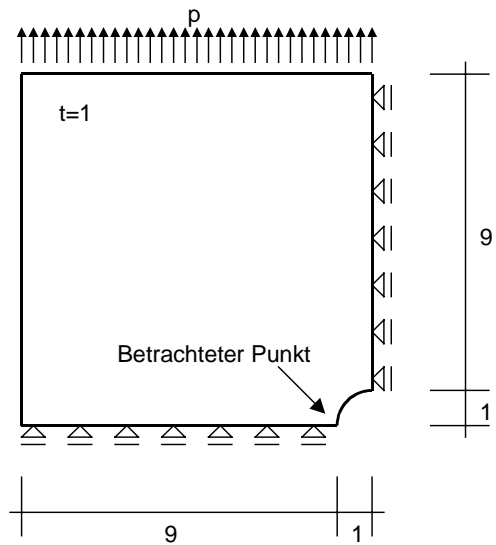
4 Algorithmus

Die Gleichungen aus Abschnitt 3 dienen als Grundlage für das folgende Berechnungsschema (nach [9]):

1. Durchführung einer linear elastischen (adaptiven) FE-Berechnung zur Bestimmung der elastischen Verzerrungen ε^e .
2. Berechnung der elastischen Vergleichsverzerrungen ε_V^e nach (3.6) und initialisieren von $i=0$ und $\varepsilon_V^i = \varepsilon_V^e$ an jedem Gaußpunkt.
3. Iteration:
 - a) Berechnen des Sekantenmodulus E_s^i nach (3.9) mit $\varepsilon = \varepsilon_V^i$ an jedem Gaußpunkt.
 - b) Für alle plastischen Punkte $\varepsilon_V > \varepsilon_y$ muß der Materialtensor nach (3.22) sowie die entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix neu berechnet werden.
 - c) Ermittlung der neuen Verzerrungen durch eine FE-Berechnung.
 - d) Über (3.21) erhält man σ und (3.18) und (3.20) führen auf ε^e und ε^p .
 - e) Die Vergleichsverzerrungen ε_V^{i+1} berechnen sich aus (3.6), (3.7) und (3.2).
 - f) Falls $\left\| \frac{\varepsilon_V^{i+1} - \varepsilon_V^i}{\varepsilon_V^{i+1}} \right\| \leq \text{tol}$ wird Iteration beendet, ansonsten i inkrementiert und die Iteration mit Punkt 3 a) fortgesetzt.

5 Numerisches Beispiel

Als Berechnungsbeispiel dient eine quadratische Scheibe der Dicke 1 mit einer Seitenlänge von 20, die in der Mitte ein kreisförmiges Loch mit Radius 1 hat. Die Scheibe wird auf Zug belastet, indem an zwei gegenüberliegenden Seiten eine Streckenlast $p_y=300$ aufgebracht wird. Das Material besitzt einen Elastizitätsmodul von $E=206,89994$ und eine Querdehnzahl $\nu=0,29$. Bei idealplastischem Materialverhalten $K=0$ ist die Fließspannung $\sigma_y=450$. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der Struktur berechnet und entsprechende Randbedingungen eingeführt (s. Abbildung 3).



Betrachtet wird der Punkt am Rand des Lochs, wo die Querschnittsfläche in Zugrichtung minimal ist

Abbildung 3: Berechnungsbeispiel

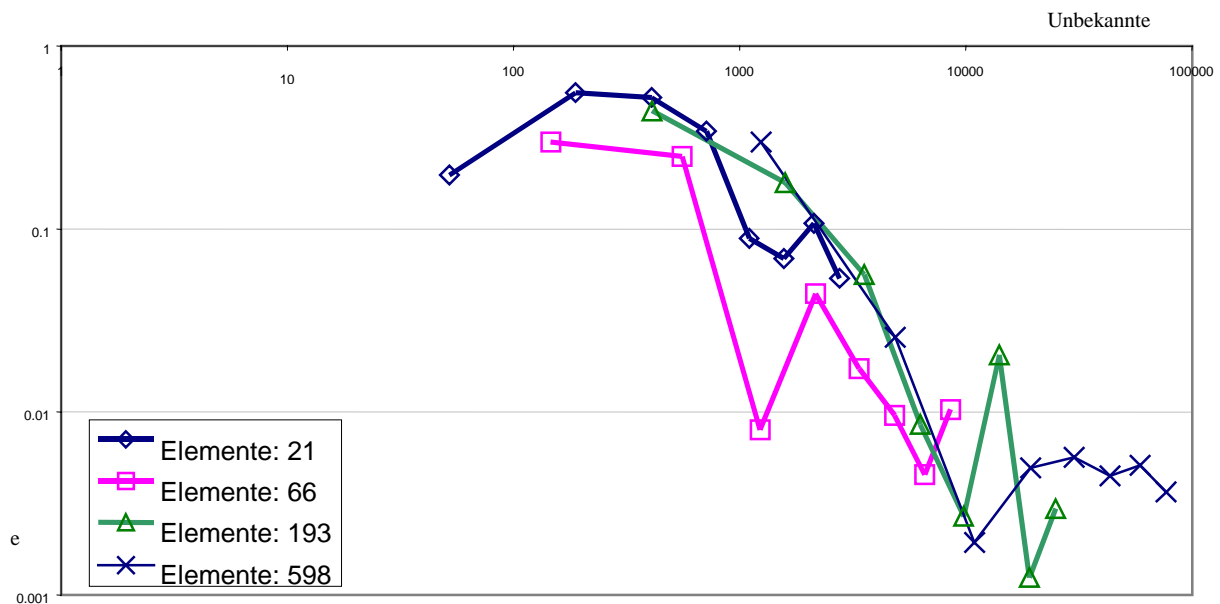


Abbildung 4: Fehler für σ_{yy} für $p=1$ bis 8

(s. Abbildung 3). Der Referenzwert für die Spannung σ_{yy} ist [10] entnommen und beträgt $\sigma_{yy}^{ref}=517,453434$. Für die berechnete Ergebnisse kann ein Fehler durch

$$e = \left\| \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{yy}^{ref}}{\sigma_{yy}^{ref}} \right\| \quad (5.1)$$

angegeben werden. Dieser wird im doppellogarithmischen Maßstab in Abhängigkeit von den Unbekannten der FE-Berechnung in Abbildung 4 aufgetragen. Wenn man die Startpunkte der Kurven in Abbildung 4 vergleicht, ist zu erkennen, daß für kleine Poly-

nomgrade der Fehler relativ groß bleibt. Ansätze höherer Ordnung sind nicht anfällig für das „poisson ratio locking“ und so sind vorzugsweise Ansätze $p \geq 4$ zu verwenden. Eine gleichmäßige Konvergenz wurde nicht erreicht.

Literatur

- [1] J. Altenbach, H. Altenbach: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Teubner Studienbücher Mechanik, 1994
- [2] J. Betten: Kontinuumsmechanik, Springer-Lehrbuch, 1993
- [3] L. E. Malvern : Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, 1969
- [4] P. Haupt : Continuum Mechanics and Theory of Materials, Springer, 2000
- [5] M.A. Crisfield: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Wiley, 1995
- [6] J.C. Simo, T.J.R. Hughes: Computational Inelasticity, Springer, 1997
- [7] W. Han, B. D. Reddy: Plasticity, Springer, 1999
- [8] B. Szabó, I. Babuška: Finite Element Analysis, John Wiley and Sons Inc., New York, 1991
- [9] B. Szabó, R. Actis, S. Holzer: Solution of elastic-plastic stress analysis problems by the p-version of the finite element method, in I. Babuška, J. Flaherty et al. (eds.): Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, 395-416, Springer, New York, 1995
- [10] A. Düster, E. Rank: The p-version of the Finite Element Method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity, accepted for publication in: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1999